

CALCULATION

CURSO DE COMPUTACIÓN CUÁNTICA 6.0

3-6 JUNIO

CÁCERES

ORGANIZA Y PATROCINA:

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU

Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia

España | digital

RES

Quantum SPAIN

TalentQ

EQI Escuela de organización industrial

4CAMhub

COLABORA:

COMPUTAEX Centro de Supercomputación de Extremadura

PA

IA

Qii

Activar Window

Curso de Computación Cuántica 6.0 - COMPUTAEX

Operación con Puertas Cuánticas. Significado Geométrico.
Entrelazamiento y algoritmos básicos que lo utilizan.

Fernando L. Pelayo

Escuela Superior de Ingeniería Informática de Albacete
Universidad de Castilla-La Mancha

Índice

1. Información Cuántica
2. Puertas Cuánticas
3. Entrelazamiento y Algoritmos Básicos

1. Información Cuántica

2. Puertas Cuánticas

3. Entrelazamiento y Algoritmos Básicos

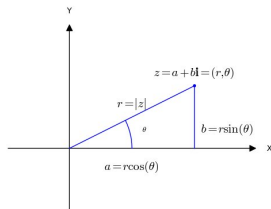
Números complejos

- ✓ **Forma Polar.** Dado un número complejo $z = a + b \cdot i$, podemos definir dos valores asociados, el módulo y el argumento, en la forma
- ✓ **Módulo**

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- ✓ **Argumento**

$$\cos \theta = a/|z|$$



$$z = |z| \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$$

Álgebra lineal

Un **espacio vectorial** sobre el cuerpo de los números complejos está formado por vectores, que son tuplas de la forma $(z_1, \dots, z_n)$.

En computación cuántica, usaremos la notación $|Q\rangle$, *ket de Q*, para representar el vector columna Q

$$|Q\rangle = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

Álgebra lineal

En un espacio vectorial podemos definir operaciones de adición (interior) y producto (exterior)

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 + z'_1 \\ \vdots \\ z_n + z'_n \end{bmatrix}$$

$$z \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z z_1 \\ \vdots \\ z z_n \end{bmatrix}$$

Álgebra lineal

Ejemplo. El producto tensorial de dos vectores de dimensión 2 es un vector de dimensión 4

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \cdot z'_1 \\ z_1 \cdot z'_2 \\ z_2 \cdot z'_1 \\ z_2 \cdot z'_2 \end{bmatrix}$$

Álgebra lineal

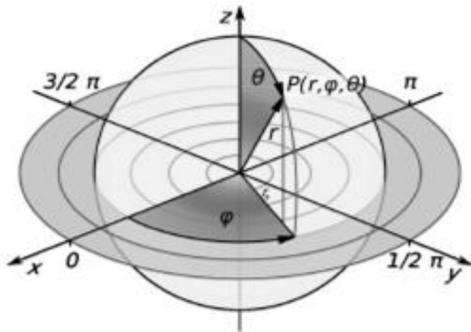
Tabla resumen de notación

Notación	Contenidos
z^*	Complejo conjugado del número z . Parte imaginaria cambiada de signo. Ej. $(1 + i)^* = 1 - i$
$ Q\rangle$	Vector columna (<i>Ket</i>)
$\langle Q $	Vector dual (fila* o <i>Bra</i>)
$\langle Q_1 Q_2\rangle$	Producto interno (escalar)
$ Q_1\rangle\langle Q_2 $	Matriz de densidad
$ Q_1\rangle \otimes Q_2\rangle$	Producto tensorial
$ Q_1\rangle Q_2\rangle$	Producto tensorial. Forma abreviada
A^*	Matriz conjugada de A
A^T	Matriz traspuesta de A
$A^\dagger$	Matriz traspuesta conjugada de A , es decir $A^\dagger = (A^T)^*$

Esfera de Bloch

El estado de un qubit se puede representar mediante la esfera de Bloch

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle$$



Esfera de Bloch - Bases habituales

El estado de un qubit se puede representar mediante la esfera de Bloch

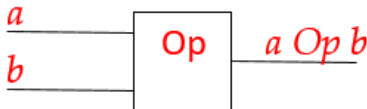
- ✓ El eje Z tiene como unidades el valor $|0\rangle$ en el polo norte y $|1\rangle$ en el sur
- ✓ El eje X tiene como unidades el valor $|+\rangle$ en el meridiano 0 con el ecuador y $|-\rangle$ en el punto contrario
- ✓ El eje Y tiene como unidades el valor $|i\rangle$ en el meridiano 90° con el ecuador y $|-i\rangle$ en el punto contrario
- ✓ Los vectores $\{|0\rangle, |1\rangle, |+\rangle, |-\rangle, |i\rangle, |-i\rangle\}$ son estados puros. 3 de estos pares conforman 3 bases en el espacio de Hilbert
- ✓ Las bases más usadas son $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ conocida como **base computacional** y $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, como **base Hadamard**
- ✓ Es contraintuitivo que los elementos de una base estén representados en la misma recta pese a ser ortogonales. ¡VEÁMOSLO!

Transformación de estados - C. Clásica

El estado de un bit se puede transformar mediante puertas lógicas clásicas.

- ✓ Las puertas lógicas clásicas son funciones booleanas arbitrarias
- ✓ Son no reversibles en general

$$\text{Op} : \{0, 1\} \longrightarrow \{0, 1\}$$

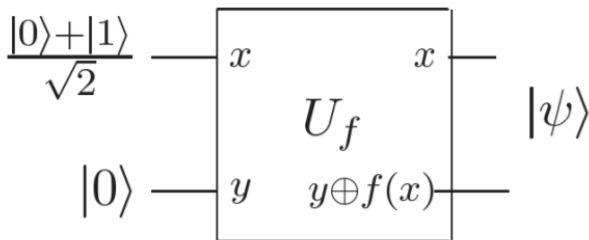


- ✓ En general:

$$\text{Op} : \{0, 1\}^n \longrightarrow \{0, 1\}^m$$

Transformación de estados - C. Cuántica

- ✓ Las puertas cuánticas SON REVERSIBLES excepto medir un qubit que destruye su estado haciéndolo colapsar a 0 o a 1
- ✓ Permiten evaluar más de una entrada a la vez



1. Información Cuántica

2. Puertas Cuánticas

3. Entrelazamiento y Algoritmos Básicos

Puertas de 1 qubit

- ✓ Puerta de 1 qubit genérica

$$|y\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \xrightarrow{\quad} \boxed{U} \xrightarrow{\quad} |y'\rangle = U|y\rangle$$

- ✓ Puerta Identidad y puertas de Pauli

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Puerta cuántica Pauli X

- ✓ Puerta cuántica Pauli X o puerta NOT o puerta BIT FLIP
- ✓ Produce un giro de Π radianes sobre el eje X

$$|\psi\rangle = (a + bi)|0\rangle + (c + di)|1\rangle$$

- ✓ $X = \text{Not} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

- ✓ Linealidad:

- ✗ Intercambia las amplitudes de probabilidad de $|0\rangle$ y $|1\rangle$

- ✗ COMPROBADLO!

Puerta cuántica Pauli Y

- ✓ Puerta cuántica Pauli Y. Similar a NOT *
- ✓ Produce un giro de Π radianes sobre el eje Y

$$|\psi\rangle = (a + bi)|0\rangle + (c + di)|1\rangle$$

- ✓ $Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$

- ✓ Linealidad:

- ✗ Intercambia las probabilidades* de $|0\rangle$ y $|1\rangle$
- ✗ COMPROBADLO!

Puerta cuántica Pauli Z

- ✓ Puerta cuántica Pauli Z o PHASE FLIP
- ✓ Produce un giro de Π radianes sobre el eje Z

$$|\psi\rangle = (a + bi)|0\rangle + (c + di)|1\rangle$$

- ✓ $Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

- ✓ Linealidad:

- ✗ Mantiene la amplitud de probabilidad de $|0\rangle$
- ✗ Cambia el signo de la amplitud de probabilidad de $|1\rangle$
- ✗ COMPROBADLO!

Puerta cuántica de Hadamard

- ✓ Puerta cuántica de superposición de estados
- ✓ Produce un giro de $\Pi/2$ radianes sobre el eje Y seguido de un giro de Π radianes sobre el eje X $\simeq$ giro de Π radianes sobre el eje Z seguido de un giro de $\Pi/2$ radianes sobre el eje Y

$$|\psi\rangle = A|0\rangle + B|1\rangle$$

$$✓ H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

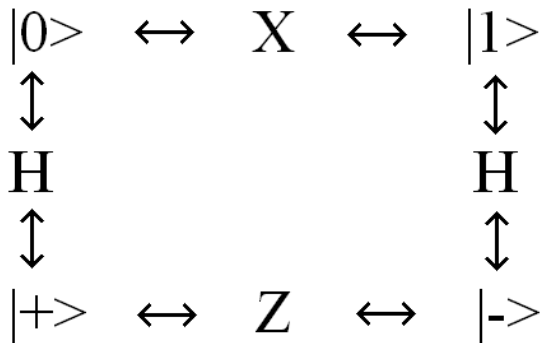
- ✓ Linealidad:

$$✗ |0\rangle \longrightarrow H \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle$$

$$✗ |1\rangle \longrightarrow H \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle$$

Ciclos con puertas cuánticas de 1 qubit

Transformaciones



COMPROBADLO!

Puerta cuántica R_θ

- ✓ Puerta cuántica R o PHASE SHIFT
- ✓ Produce un giro de θ radianes sobre el eje Z. $R_\pi = Z$

$$|\psi\rangle = (a + bi)|0\rangle + (c + di)|1\rangle$$

- ✓ $R_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$

- ✓ Linealidad:

- ✗ Mantiene la amplitud de probabilidad de $|0\rangle$
- ✗ Mantiene la probabilidad de $|1\rangle$
- ✗ ¿Qué tenemos cuando $\theta = \pi$?

Composición de estados

- ✓ Dados 2 qubits $|Q_1\rangle$ y $|Q_2\rangle$, podemos formar un registro de 2 qubits con el producto de Kronecker

$$|Q_1 Q_2\rangle = |Q_1\rangle \otimes |Q_2\rangle$$

- ✓ Se puede generalizar a n qubits

$$|Q_1 Q_2 \dots Q_n\rangle = |Q_1\rangle \otimes |Q_2\rangle \otimes \dots \otimes |Q_n\rangle$$

- ✓ La base estándar para el espacio de Hilbert de un registro de 2 qubits es ... COMPROBAD!

$$|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$$

$$|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle$$

$$|10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle$$

$$|11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle$$

- ✓ Para 3 qubits es
 $\{|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |011\rangle, |100\rangle, |101\rangle, |110\rangle, |111\rangle\}$

Puertas de 2 qubits

✓ Puerta de Hadamard de 2 qubits

$$\begin{aligned}
 |0\rangle &\longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow 1/\sqrt{2} (|0\rangle + |1\rangle) \\
 |0\rangle &\longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow 1/\sqrt{2} (|0\rangle + |1\rangle) \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} |0\rangle &\longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow 1/\sqrt{2} (|0\rangle + |1\rangle) \\ |0\rangle &\longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow 1/\sqrt{2} (|0\rangle + |1\rangle) \end{aligned}} \right\} = 1/2 (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \\
 |00\rangle &\longrightarrow \boxed{H_4} \longrightarrow 1/2 (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)
 \end{aligned}$$

✓ Donde la puerta H_4 es la matriz $4 \times 4 \dots$ COMPROBAD!

$$H_4 = H \otimes H = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

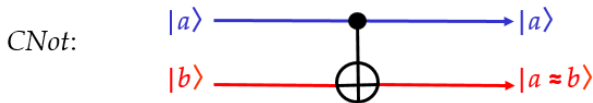
1. Información Cuántica

2. Puertas Cuánticas

3. Entrelazamiento y Algoritmos Básicos

Puerta CNot

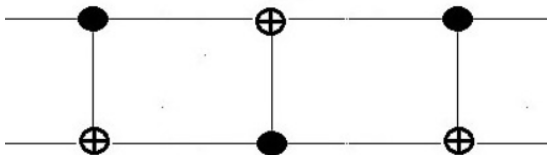
- ✓ Puerta Not Controlado, CNot
- ✓ Puerta del conjunto universal



$$\begin{aligned}
 CNot(|00\rangle) &= |00\rangle \\
 CNot(|01\rangle) &= |01\rangle \\
 CNot(|10\rangle) &= |11\rangle \\
 CNot(|11\rangle) &= |10\rangle
 \end{aligned}
 \quad CNot = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle \left\{ \begin{array}{c} \text{CNOT} \end{array} \right\} a|00\rangle + b|01\rangle + c|11\rangle + d|10\rangle$$

Circuito = Puerta SWAP



Equivalente a

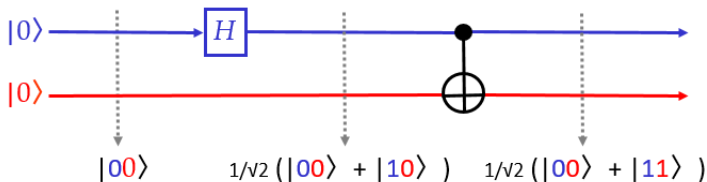
$$Swap = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

COMPROBADLO (usando linealidad) sobre:

$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$ aplicando linealidad

Qubits entrelazados

- ✓ Estados entrelazados, par EPR o par de Bell



- ✓ Tras la ejecución del operador, los dos qubits están entrelazados. Forman un estado EPR.
Si uno de ellos es $|0\rangle$, el otro también, y viceversa con $|1\rangle$.
- ✓ COMPROBADLO MATRICIALMENTE!

Estados entrelazados

- ✓ Un par entrelazado forma un estado inalcanzable por composición de estados de qubits
- ✓ Sea $|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$
- ✓ Supongamos dos qubits A y B tales que su composición es y

$$|A\rangle = a_1|0\rangle + b_1|1\rangle$$

$$|B\rangle = a_2|0\rangle + b_2|1\rangle$$

$$\text{Pero } |A\rangle \otimes |B\rangle = a_1 a_2 |00\rangle + a_1 b_2 |01\rangle + b_1 a_2 |10\rangle + b_1 b_2 |11\rangle$$

- ✓ Sin embargo, este es un sistema incompatible

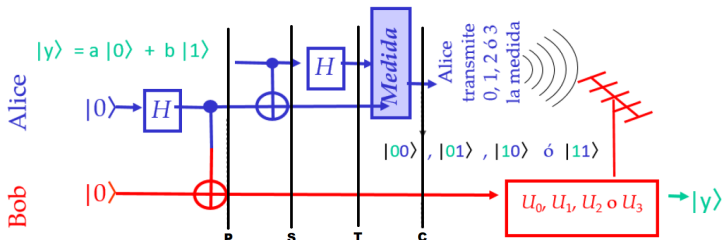
$$a_1 a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a_1 b_2 = 0$$

$$b_1 a_2 = 0$$

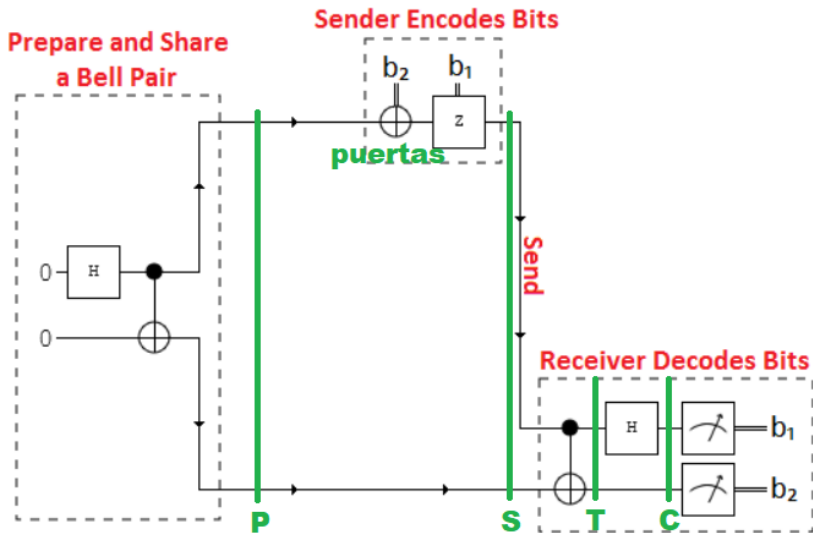
$$b_1 b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Algoritmo de teleportación Cuántica



1. Estado del sistema en **P**rimero
2. Estado del sistema en **S**egundo
3. Estado del sistema en **T**ercero
4. Estado del sistema en **C**uarto

Codificación Superdensa



Algoritmo de Deutsch

✓ Sin entrelazamiento!

